TD 9 - Homologie singulière

Notions du cours.

- Simplexe singulier, complexe singulier, homologie singulière.
- Groupes d'homologie réduits.
- Homologie relative.
- Suite exacte de Mayer-Vietoris.
- Théorème d'excision.

Exercice 1 (**Homologie de $\mathbb{S}^k$**). Calculer $H_n(\mathbb{S}^k)$ pour tout $n, k \geq 0$.

Exercice 2. Soit $\sigma : [0,1] \to X$ un 1-simplexe singulier. Posons $\bar{\sigma}(t) = \sigma(1-t)$. Trouver un 2-simplexe singulier u de X tel que $\partial u = \sigma + \bar{\sigma}$.

Exercice 3. Calculer les groupes d'homologie singulière relative $H_n(X, A)$ quand $X = S^2$ ou $S^1 \times S^1$ et A est un ensemble fini de points de X.

Exercice 4. Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques pointées tels que X et Y sont homéomorphes à un ouvert de $\mathbb{R}^k$ localement en x_0 et y_0. Soit $M = (X, x_0)\#(Y, y_0)$ la somme connexe de X et Y.

(a) Montrer que $H_n(Z) \simeq H_n(X) \oplus H_n(Y)$ pour tout $k \notin \{n, n-1\}$.

Soit maintenant $X = Y = \mathbb{RP}^2$.

(b) Calculer $H_n(\mathbb{RP}^2)$ et $H_n(K)$ pour tout $n \geq 0$, avec K la bouteille de Klein.

Exercice 5 (**Homologie d'un bouquet d'espaces**). Considérons deux espaces topologiques X et Y, avec deux points marqués $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$, tels que (X, x_0) et (Y, y_0) forment des bonnes paires. Soit $X \vee Y = X \sqcup Y/(x_0 \sim y_0)$ le bouquet de (X, x_0) et (Y, y_0). Montrer que $\widetilde{H}_*(X \vee Y) \simeq \widetilde{H}_*(X) \oplus \widetilde{H}_*(Y)$.

Exercice 6. Soit A un espace topologique et X obtenu à partir de A par adjonction d'un nombre fini de cellules. Soit $p : X \to X/A$ le quotient naturel.

(a) Montrer que p induit un isomorphisme $H_\bullet(p) : H_\bullet(X, A) \to H_\bullet(X/A, [A])$.

(b) En déduire un isomorphisme $H_\bullet(X, A) \simeq \widetilde{H}_\bullet(X/A)$.

Exercice 7 (**Homologie des espaces projectifs complexes.**).

(a) Calculer $\widetilde{H}_\bullet(\mathbb{RP}^3)$.

(b) Calculer $\widetilde{H}_\bullet(\mathbb{CP}^n)$.

Exercice 8 (**Homologie des espaces lenticulaires**). Calculer $\widetilde{H}_\bullet(L_{p,q})$ où $L_{p,q}$ est l'espace lenticulaire (voir TD6.Exo7 et TD7.Exo5).

Exercice 9.

(a) Soit $X = U \cup V$ la réunion de deux ouverts tels que U, V et $U \cap V$ sont non-vides et avec groupes d'homologie réduite triviaux. Montrer que $\widetilde{H}_i(X) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

(b) Soit $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, avec A_i ouverts et tels que, pour tout sous-ensemble non-vide J des indices $\{1, \ldots, n\}$, l'intersection $\bigcap_{j \in J} A_j$ est non-vide et avec groupes d'homologie réduite triviaux. Montrer que $\widetilde{H}_i(X) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

(c) Dans la situation du point précédent, on suppose maintenant que $\bigcap_{j \in J} A_j$ est soit vide, soit à groupes d'homologie réduite triviaux. Montrer que $\widetilde{H}_i(X) = 0$ pour $i \geq n-1$. Donner des exemples qui prouvent que cette inégalité est la meilleure possible, pour chaque n.

Exercice 10. Soit X le cône du 1-squelette Y de Δ^3. On peut représenter ce cône comme étant l'union de tous les segments joignant les points du 1-squelette au barycentre de Δ^3.

(a) Calculer les groupes d'homologie locale $H_n(X, X \setminus \{x\})$ pour tout $x \in X$.

Soit ∂X le sous-espace de X constitué des points x dont l'homologie locale est nulle.

(b) Pour tout $x \in \partial X$, calculer $H_n(\partial X, \partial X \setminus \{x\})$.

(c) Déterminer alors tous les sous-ensembles $A \subset X$ tels que $f(A) \subset A$ pour tout homéomorphisme $f : X \to X$.

Δ-homologie et homologie singulière.

On veut montrer que si X admet une structure de Δ-complexe, alors la Δ-homologie et l'homologie singulière sont isomorphes. D'abord, on a besoin de définir la Δ-homologie relative. Pour cela, soit X un Δ-complexe, et A un sous-complexe de X (c'est à dire, une réunion d'un sous-ensemble des simplexes qui forment X). Pour tout n, on considère $\Delta_n(X, A) = \Delta_n(X)/\Delta_n(A)$. On définit l'application de bord $\overline{\partial}_n : \Delta_n(X, A) \to \Delta_{n-1}(X, A)$ par $\overline{\partial}_n[E] = [\partial_n E]$.

Exercice 11. Montrer que $(\Delta_\bullet(X, A), \overline{\partial}_\bullet)$ définit un complexe de chaînes.

On dénote par $H^\Delta_\bullet(X, A)$ les groupes d'homologie associés à ce complexe de chaînes.
Soit maintenant $\Phi^X_\bullet : \Delta_\bullet(X) \to C_\bullet(X)$ le morphisme de chaînes qui associe à un n-simplexe e^n_α l'application $\sigma_\alpha : \Delta^n \to e^n_\alpha \subseteq X$ obtenue comme composition de l'injection canonique de Δ^n dans $\sqcup_\alpha \Delta^{n_\alpha}_\alpha$, composé par la projection canonique donnée par l'identification des faces. On définit de façon analogue $\Phi^A_\bullet$ et $\Phi^{X,A}_\bullet$. On veut montrer le théorème suivant.

Théorème. *Le morphisme $\Phi^X_\bullet$ induit un isomorphisme en homologie $H^\Delta_\bullet(X) \to H_\bullet(X)$.*

Soit X^k le k-squelette de X, obtenu en considérant la réunion des h-simplexes de K pour $h = 0, \ldots, k$. Pour montrer ce théorème, on considère le diagramme commutatif suivant, où les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
H^\Delta_{n+1}(X^k, X^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & H^\Delta_n(X^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & H^\Delta_n(X^k) \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & H^\Delta_n(X^k, X^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "f_4"'] & H^\Delta_{n-1}(X^{k-1}) \arrow[d, "f_5"'] \\
H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) \arrow[r] & H_n(X^{k-1}) \arrow[r] & H_n(X^k) \arrow[r] & H_n(X^k, X^{k-1}) \arrow[r] & H_{n-1}(X^{k-1}),
\end{tikzcd}$$

où $f_1 = H_{n+1}(\Phi^{X_k, X_{k-1}}_\bullet)$, $f_2 = H_n(\Phi^{X_{k-1}}_\bullet)$, et ainsi de suite.

Exercice 12. Dans le cadre du diagramme commutatif en haut :

(a) Calculer $H^\Delta_n(X^k, X^{k-1})$ au varier de n, k.

(b) Calculer $H_n(X^k, X^{k-1})$ au varier de n, k.

(c) Montrer que f_1 et f_4 sont des isomorphismes pour tout n.

(d) Démontrer le théorème dans le cas que X est de dimension finie.

(e) Montrer que un compact K dans X ne peut rencontrer qu'on nombre fini de simplexes $e^{n_\alpha}_\alpha$ de X.

(f) En déduire la validité du théorème dans le cas général.

Degré des endomorphismes de $\mathbb{S}^n$

Exercice 13. Soit $\mathbb{S}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$.

(a) Montrer l'application $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a degré -1.

(b) Déduire que l'application $\sigma : x \mapsto -x$ a degré $(-1)^{n+1}$.

(c) Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une fonction continue sans points fixes. Montrer que $\deg f = (-1)^{n+1}$.

Exercice 14. Soit X un espace topologique, on note $C(X) = X \times I / X \times \{1\}$ son cône et $S(X) = C(X)/X \times \{0\}$ sa suspension.

(a) Montrer que $C, S : Top \to Top$ définissent deux foncteurs (covariants).

(b) Montrer, en utilisant la suite exacte longue d'homologie associée à la paire $\mathbb{S}^n \subset C(\mathbb{S}^n)$, que si $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ est une application continue alors $S(f) : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+1}$ vérifie $\deg(S(f)) = \deg(f)$.

(c) En déduire que pour $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$, on peut construire une application $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de degré k.

Exercice 15. Construisez une application surjective $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de degré zéro, pour chaque $n \geq 1$.

Exercice 16. Une application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ qui satisfait $f(x) = f(-x)$ pour tout x est dite *paire*.

(a) Montrer qu'une application $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ paire doit avoir un degré pair, et que ce degré doit être nul quand n est pair.

(b) Quand n est impair, montrer qu'il existe des applications paires de tout degré pair.

Exercice 17 (Théorème de la boule chevelue).
Montrer que $\mathbb{S}^n$ admet un champ de vecteurs tangents $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ continu et non dégénère ($v(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$) si et seulement si n est impair.

Exercice 18 (Théorème de Brouwer).
Montrer que toute application continue $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ admet un point fixe.

Exercice 19 (Théorème de Borsuk-Ulam).
Montrer que pour toute application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ il existe un point $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Exercice 20 (Théorème de Jordan-Brouwer).
Soit $A \subset \mathbb{S}^n$ un sous-ensemble de la n-sphère qui est homéomorphe à la k-sphère $\mathbb{S}^k$, pour $0 \leq k \leq n-1$.

(a) Montrer que $\widetilde{H}_{n-k-1}(\mathbb{S}^n \setminus A) = \mathbb{Z}$ et $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus A) = 0$ pour tout $i \neq n-k-1$.

(b) Déduire que si $k = n-1$, alors $\mathbb{S}^n \setminus A$ a exactement deux composantes connexes.

Homologie cellulaire

Soit X un complexe cellulaire (CW-complex). On rappelle qu'on complexe cellulaire est construit de façon récursive. Au départ, on a un ensemble discret X^0 (dit 0-squelette de X). On construit le 1-squelette X^1 en attachant des 1-celles $\{e^1_\alpha\}$ en suivant des recollements $f^1_\alpha : \partial\mathbb{B}^1 = \mathbb{S}^0 \to X_0$. Par récurrence, on construit le n-squelette X^n de X en attachant des n-cellules $\{e^n_\alpha\}$ en suivant les recollements $f^n_\alpha : \partial\mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1} \to X^{n-1}$. On dénote par I_n l'ensemble des indices des n-celles de X. Pour simplifier la situation, on ne considère que de complexes cellulaires de dimension finie (c'est à dire, $I_n = \emptyset$ pour n assez grand.
On veut associer à X un complexe de chaînes $CW_\bullet(X)$.

Exercice 21. Soit X un complexe cellulaire de dimension finie. Montrer les propriétés suivantes :

(a) $H_k(X^n, X^{n-1})$ est nul pour $k \neq n$ et il est le groupe abélien libre $\displaystyle\bigoplus_{\alpha \in I_n} \mathbb{Z}[e^n_\alpha]$ pour $k = n$.

(b) $H_k(X^n) = 0$ pour $k > n$.

(c) L'inclusion $i : X^n \to X$ induit un isomorphisme $i_* : H_k(X^n) \to H_k(X)$ pour tout $k < n$.

Le complexe $CW_\bullet(X)$ sera défini par

$$CW_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1}) \simeq \oplus_{\alpha \in I_n} \mathbb{Z}[e^n_\alpha].$$

Pour définir les applications de bord, on considère le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 & & \\
 & 0 \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1}) \arrow[ur] & & & \\
 & & H_n(X^n) \arrow[ur] \arrow[dr, "j_n"] & & & & \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[ur, "\delta_{n+1}"] \arrow[rr, "d_{n+1}"] & & H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "\delta_n"'] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[r] & \cdots \\
 & & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur, "j_{n-1}"'] & & \\
 & & & 0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

On définit le bord $d_n : CW_n(X) \to CW_{n-1}(X)$ comme $d_n = j_{n-1} \circ \delta_n$.

Exercice 22. Soit X un complexe cellulaire de dimension finie, et $(CW_\bullet(X), d_\bullet)$ définit comme ci-dessus.

(a) Montrer que $d_n \circ d_{n+1} = 0$

Cela nous dit que $(CW_\bullet(X), d_\bullet)$ est un complexe de chaînes. On dénote par $H_\bullet^{CW}(X)$ les groupes d'homologie de ce complexe.

(b) Montrer que $H_n(X) \simeq H_n^{CW}(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On veut décrire de façon plus explicite l'application de bord d_n.

Exercice 23. Soit X un complexe cellulaire de dimension finie, et e_α^n une n-celle, avec application d'identification $f_\alpha : \mathbb{S}^{n-1} \to X^{n-1}$. Montrer que

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta \in I_{n-1}} d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1},$$

où $d_{\alpha\beta}$ est le degré de l'application $\mathbb{S}^{n-1} \to X^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ donnée par la composition de f_α et la rétraction r_β de X^{n-1} sur $e_\beta^{n-1}/\partial e_\beta^{n-1}$ qui contracte $X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}$ et ∂e_β^{n-1} sur un point.

Exercice 24 (**Homologie des espaces projectifs réels.**).

(a) Rappeler la structure de complexe cellulaire de $\mathbb{RP}^n$.

(b) Calculer $\widetilde{H}_\bullet(\mathbb{RP}^n)$.

Exercice 25. Soit $(k_1, \ldots, k_n)$ une n-uple d'entiers positifs, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Construire un espace X tel que $H_i(X) \simeq \mathbb{Z}/k_i\mathbb{Z}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.